

2I.3

I'm going to use shorthand notation "Irr(Diagram)" which will stand for taking the irreducible part of the diagram. For example, here's the Irr(2.35):

$$\text{Irr}(\text{---}\bullet\text{---}) = \text{---}\text{---} + \frac{1}{2} \text{---}\text{---}\text{---} + \frac{1}{2} \text{---}\text{---}\text{---}\text{---} + \frac{1}{2} \text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} + \frac{1}{6} \text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} \quad (\text{A1})$$

In the following expressions I will only draw diagrams containing up to 3 loops (as asked by the problem).

$$\frac{1}{\hbar} \Gamma[0] = \left(\frac{1}{\hbar} \int_0^{\hbar} d\hbar \frac{d\Gamma[\phi]}{d\hbar} \right) \Big|_{\phi=0}$$

According to (2.45):

$$\begin{aligned} -\hbar \frac{d\Gamma[\phi]}{d\hbar} \Big|_{\phi=0} = & \frac{1}{\hbar} S[0] + \frac{1}{\hbar} \left\{ -\frac{1}{2} \text{---}\text{---}\text{---} + \frac{1}{3!} \text{---}\text{---}\text{---}\text{---} + \frac{1}{4!} \text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} + \frac{1}{8} \text{---}\text{---}\text{---} \right\} \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$


Since $S[\phi] = -\frac{1}{2} \Delta_{ij}^{-1} \phi_i \phi_j + \frac{1}{3!} \gamma_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \dots$
 $S[0] = 0$.

$$\text{---}\text{---}\text{---} = \text{---}\text{---} + \text{---}\overset{\pi}{\bullet}\text{---} + \frac{1}{2} \text{---}\overset{\pi}{\bullet}\text{---}\overset{\pi}{\bullet}\text{---} + \dots \quad (\text{eqn. before 2.32})$$

$$\pi_{ij} = \Gamma_{ij} + \Delta_{ij}^{-1} \rightarrow \text{---}\overset{\pi}{\bullet}\text{---} = \text{---}\text{---} + \text{---}\text{---}$$

Since in (A2):

 comes with diagram with 1 loop, & will expand it to 2 loops

 comes with diag. with 2 loops, & will expand it to 1 loop.

 comes with diag. with 3 loops & will expand it to zero loops.

 contains at least 1 loop, so it will be omitted }

$\bar{\tau} = \text{diagram with 1 loop} + \dots$ is done in the book (eqn 2.35)

$$\text{Irr}(\bar{\tau}) = \frac{1}{2} \text{diagram 1} + \frac{1}{2} \text{diagram 2} + \frac{1}{2} \text{diagram 3} + \frac{1}{6} \text{diagram 4}$$

(pull a leg of)

$$\text{Irr}(\text{diagram with 1 loop}) = \text{diagram with 1 loop} + \frac{2}{2} \text{diagram 1} + \frac{2}{2} \text{diagram 2} + \frac{1}{2} \text{diagram 3} + \dots$$

+ $\frac{2}{2}$ diagram 4 + $\frac{1}{2}$ diagram 5 + $\frac{3}{6}$ diagram 6 + $\frac{1}{6}$ diagram 7 (more than 2 loops)

(pull a leg of)

$$\text{Irr}(\text{diagram with 1 loop}) = \text{diagram with 4 legs} + \text{loops}$$

Up to 2 loops:

$$\text{---} \circledast \text{---} = \text{---} \bullet \text{---} + \frac{\pi}{2!} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2!} \text{---} \circledast \circledast \text{---} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{---} \circledast \text{---} &= \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \circledast \text{---} \\ &= \frac{1}{2} (\text{---} \circledast \text{---} + \text{---} \circledast \text{---}) + \frac{1}{2} (\text{---} \circledast \text{---} + 2 \text{---} \circledast \circledast \text{---}) + \dots \\ &= \frac{1}{2} (\text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---}) + \frac{1}{2} (\text{---} \circledast \text{---} + \text{---} \circledast \text{---} + \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \text{---} \circledast \text{---} \\ &\quad + \text{---} \circledast \text{---}) + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \circledast \text{---} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \text{---} \circledast \circledast \text{---} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 \text{---} \circledast \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \text{---} \circledast \text{---} \right) + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{---} \circledast \text{---} &= \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \circledast \text{---} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} &= \frac{1}{2} \left(\text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \circledast \text{---} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{3}{16} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{5}{8} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{5}{8} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{3}{8} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{12} \text{---} \circledast \text{---} \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{h^2} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{h^1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \text{---} \circledast \circledast \text{---} &= \frac{1}{3!} \left(\text{---} \circledast \text{---} + 3 \text{---} \circledast \text{---} \right) = \frac{1}{3!} \left(\text{---} \circledast \text{---} + \text{---} \circledast \text{---} + \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{3}{2} \left(\text{---} \circledast \text{---} + \text{---} \circledast \text{---} \right) \right) \\ &= \frac{1}{6} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circledast \text{---} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4!} \text{diagram} = \frac{1}{24} \text{diagram} ; \frac{1}{8} \text{diagram} = \frac{1}{8} \text{diagram}$$

$$\frac{1}{8} \text{diagram} = \frac{1}{8} (\text{diagram} + \text{diagram}) = \frac{1}{8} (\text{diagram} + \frac{1}{24} \text{diagram} + \text{diagram}) = \frac{1}{8} \text{diagram} + \frac{1}{16} \text{diagram} + \frac{1}{8} \text{diagram}$$

$$\frac{d\Gamma}{d\hbar} = \frac{1}{\hbar^2} \left\{ \frac{1}{2} \text{diagram} - \frac{1}{3!} \text{diagram} - \frac{1}{4!} \text{diagram} - \frac{1}{8} \text{diagram} - \frac{1}{8} \text{diagram} \right\}$$

Coefficients in front of diagrams:

$$0 : \frac{1}{2} \quad \} \times \hbar$$

$$8 : \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad \} \times \hbar^2$$

$$\Theta : \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\text{diagram} : \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\text{diagram} : \frac{5}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{diagram} : \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{diagram} : \frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\text{diagram} : \frac{5}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{diagram} : \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

\hbar^3

$$\frac{d\Gamma}{d\hbar} = \frac{1}{2} \frac{\delta_{ii}}{\hbar} + \left(\frac{1}{8} 8 + \frac{1}{12} \Theta \right) + (\dots) \hbar$$

$$\Gamma[0] = \frac{\delta_{ii} \ln \hbar}{2} + \hbar \left(\frac{1}{8} 8 + \frac{1}{12} \Theta \right) + \hbar^2 \left(\frac{1}{24} \text{diagram} + \frac{1}{16} \text{diagram} + \frac{1}{8} \text{diagram} + \frac{1}{8} \text{diagram} + \frac{1}{16} \text{diagram} + \frac{1}{48} \text{diagram} \right)$$